

Übungsblatt 8

Aufgabe P1 *Dichtetransformation.*

Sei X die Gleichverteilung auf dem Intervall $(0, 1)$.

- a) Bestimmen Sie die Verteilung von $Y := X^2 + 1$.
- b) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[Y]$.

Lösung: a)

$Y = X^2$ hat Werte in $(1, 2)$. Es folgt für $1 < c < 2$

$$F_Y(c) = \mathbb{P}(Y \leq c) = \mathbb{P}(X^2 + 1 \leq c) = \mathbb{P}(X \in (0, \sqrt{c-1})) = \sqrt{c-1}.$$

Y hat demnach die Dichtefunktion:

$$f_Y(c) = F'_Y(c) = \frac{1}{2\sqrt{c-1}}, \quad 1 < c < 2$$

und $f(c) = 0$ sonst.

b)

Variante 1: $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X^2 + 1] = \mathbb{E}[X^2] + 1$ und

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^1 t^2 f_X(t) dt = \int_0^1 t^2 \cdot \frac{1}{1-0} dt = \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{3}.$$

Also $\mathbb{E}[Y] = 4/3$.

Variante 2: Mit partieller Integration ist

$$\mathbb{E}[Y] = \int_1^2 t \cdot f_Y(t) dt = [t \cdot F_Y(t)]_{t=1}^{t=2} - \int_1^2 F_Y(t) dt = 2 - 0 - \int_1^2 \sqrt{t-1} dt = 2 - \left[\frac{2}{3} (t-1)^{3/2} \right]_{t=1}^{t=2} = \frac{4}{3}.$$

Aufgabe P2 *Varianz der Exponentialverteilung.*

Berechnen Sie zu $\lambda > 0$ die Varianz $\text{Var}(X)$ einer exponentialverteilten Zufallsvariablen $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Lösung:

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx = 1/\lambda.$$

$$\text{Var}(X) = \int_0^\infty (x - 1/\lambda)^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} dx - 2 \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx + 1/\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = 1/\lambda^2.$$

Aufgabe H1 Rechnen mit Dichten.

a) Sei Z eine Zufallsvariable mit Dichte

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{6}z + \frac{1}{4}z^2, & \text{für } 0 < z \leq 2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie $\mathbb{P}(Z > 1)$, $\mathbb{E}[Z]$ und $\text{Var}[Z]$.

b) Sei (X, Y) ein stetiger Zufallsvektor mit Dichte

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 4x \cdot (1 - y), & \text{für } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Dichten der Randverteilungen X und Y .

c) Sind X und Y aus Teil b) unabhängig?

Lösung: a) Wir haben

$$\mathbb{P}(Z > 1) = \int_1^2 f_Z(z) dt = \int_1^2 \frac{1}{6}z + \frac{1}{4}z^2 dt = \left[\frac{z^2}{12} + \frac{z^3}{12} \right]_1^2 = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

und

$$\mathbb{E}[Z] = \int_0^2 z f_Z(z) dt = \int_0^2 \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{4}z^3 dt = \left[\frac{z^3}{18} + \frac{z^4}{16} \right]_0^2 = \frac{13}{19}.$$

Da

$$\mathbb{E}[Z^2] = \int_0^2 z^2 f_Z(z) dt = \int_0^2 \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{4}z^4 dt = \left[\frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{20} \right]_0^2 = \frac{34}{15}$$

ist

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{34}{15} - \left(\frac{13}{19} \right)^2 = \frac{73}{405} \approx 0.180247.$$

b) Für $0 < x < 1$ gilt:

$$f_X(x) = \int_0^1 f_{(X,Y)}(x, y) dy = 4 \int_0^1 x - xy dy = 4 \left[xy - \frac{1}{2}xy^2 \right]_0^1 = 2x$$

Also ist

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & \text{für } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $0 < y < 1$ gilt:

$$f_Y(y) = \int_0^1 f_{(X,Y)}(x,y) dx = 4 \int_0^1 x - xy dx = 4 \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2y \right]_0^1 = 2 - 2y$$

Also ist

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2 - 2y, & \text{für } 0 < y < 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

c) X und Y sind genau dann unabhängig, wenn $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Offenbar gilt für alle $x, y \in (0,1)$

$$f_{(X,Y)}(x,y) = 4x(1-y) = 2x(2-2y) = f_X(x)f_Y(y).$$

Für $x \in (0,1), y \notin (0,1)$ bzw. $x \notin (0,1), y \in (0,1)$ bzw. $x, y \notin (0,1)$ sind sowohl $f_{(X,Y)}(x,y)$ als auch $f_X(x)f_Y(y)$ Null. Also sind X und Y unabhängig.

Aufgabe H2 Dichtetransformationsformel.

Aus der Analysis ist die Substitutionsregel für Integrale bekannt: Seien I ein reelles Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\varphi : [a, b] \rightarrow I$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt.$$

Sei nun X eine Zufallsvariable mit Werten in einem offenen, möglicherweise unbeschränkten Intervall I und stetiger Dichte f_X , sei weiter $J \subseteq (0, \infty)$ und sei $\varphi : I \rightarrow J$ bijektiv, stetig differenzierbar mit nirgends verschwindender Ableitung φ' . Zeigen Sie mithilfe der Substitutionsregel, dass dann die Zufallsvariable $Y := \varphi(X)$ die folgende Dichte hat:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{f_X(\varphi^{-1}(y))}{|\varphi'(\varphi^{-1}(y))|}, & y \in J, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lösung: Nach Voraussetzung hat die Ableitung von φ keine Nullstelle, also ist die Funktion φ streng monoton. [1 Pkt] Wir betrachten zunächst den strikt wachsenden Fall. Für $I = (a, b)$ und $z < \varphi(a)$ gilt $\mathbb{P}(Y \leq z) = 0$ und für $z > \varphi(b)$ dann $\mathbb{P}(Y \leq z) = 1$. Für $z \in [\varphi(a), \varphi(b)]$ folgern wir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq z) &= \mathbb{P}(\varphi(X) \leq z) = \mathbb{P}(X \leq \varphi^{-1}(z)) = \int_a^{\varphi^{-1}(z)} f_X(x) dx = \int_a^{\varphi^{-1}(z)} \frac{f_X(\varphi^{-1}(\varphi(x)))}{|\varphi'(\varphi^{-1}(\varphi(x)))|} \cdot \varphi'(x) dx \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi^{-1}(z)} \frac{f_X(\varphi^{-1}(y))}{|\varphi'(\varphi^{-1}(y))|} dy = \int_{-\infty}^z \frac{f_X(\varphi^{-1}(y))}{|\varphi'(\varphi^{-1}(y))|} dy. \quad [3 \text{ pkt}] \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung, denn ist andererseits $\varphi' < 0$, so gilt für $z < \varphi(b)$, dass $\mathbb{P}(Y \leq z) = 0$ und für $z > \varphi(a)$, dass $\mathbb{P}(Y \leq z) = 1$ und für $z \in [\varphi(b), \varphi(a)]$:

$$\mathbb{P}(Y \leq z) = \mathbb{P}(X \geq \varphi^{-1}(z)) = \int_{\varphi^{-1}(z)}^b f_X(x) dx = - \int_z^{\varphi(b)} \frac{f_X(\varphi^{-1}(y))}{|\varphi'(\varphi^{-1}(y))|} dy = \int_{-\infty}^z \frac{f_X(\varphi^{-1}(y))}{|\varphi'(\varphi^{-1}(y))|} dy. \quad [2 \text{ pkt}]$$

Aufgabe H3 Exponentialverteilung.

- a) Sei X exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Berechnen Sie die Dichtefunktion von e^X .
- b) Sei nun zusätzlich $\lambda = 2$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[e^X]$.

Lösung: a) Da $X \in (0, \infty)$ gilt $e^X \in (1, \infty)$ (0.5 P.). Es ist für $1 < t$:

$$F_{e^X}(t) = \mathbb{P}(e^X \leq t) = \mathbb{P}(X \leq \ln(t)) = 1 - e^{-\lambda \ln(t)} = 1 - t^{-\lambda}. \quad (1 \text{ P.})$$

Damit ist für $t > 1$:

$$f_{e^X}(t) = F'_{e^X}(t) = \lambda t^{-(\lambda+1)}. \quad (0.5 \text{ P.})$$

Somit folgt insgesamt:

$$f_{e^X}(t) = \begin{cases} \lambda t^{-(\lambda+1)}, & \text{für } t > 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1 \text{ P.})$$

b) Variante 1: $\mathbb{E}[e^X] = 2 \int_0^\infty e^t e^{-2t} dt = 2 [-e^{-t}]_{t=0}^{t=\infty} = 2 \cdot (0 - (-1)) = 2.$

Variante 2:

$$\mathbb{E}[e^X] = \int_0^\infty t \cdot f_{e^X}(t) dt = \int_1^\infty t \cdot 2t^{-3} dt = 2 \int_1^\infty t^{-2} dt = 2 [-1/t]_{t=1}^{t=\infty} = 2 \cdot (0 - (-1)) = 2.$$

Abgabe der Hausübungen (Aufgaben H1 bis H3): Mittwoch, 04. Dezember, 16:00 Uhr

Viel Erfolg! :)